

# Développement d'un modèle numérique pour l'étude de structures composites hybrides à fibres de lin/carbone

## *Development of a Numerical Model for the Study of Hybrid Flax/Carbon Fiber Composite Structures*

V. Couillard<sup>1</sup>, K. Chikhaoui<sup>1</sup>, L. Duigou<sup>1</sup>, Y. Guevel<sup>1</sup>, J.-M. Cadou<sup>1</sup>

1 : UMR CNRS 6027, IRDL  
Université Bretagne Sud  
Lorient, 56100, France  
e-mail : vincent.couillard@univ-ubs.fr

### Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à la détermination numérique de l'amortissement de structures composites hybrides composées de fibres de lin et de carbone. La fibre de lin introduisant une dépendance à la fréquence de ces propriétés amortissantes, nous considérons des lois de comportement viscoélastiques (hystérétique, Maxwell généralisé, Zener fractionnaire). Pour connaître les propriétés amortissantes de ces composites stratifiés hybrides, les problèmes de vibrations libres et forcées sont étudiés. Les lois de comportement choisies introduisent une dépendance non-linéaire à la fréquence dans les problèmes à résoudre. Pour résoudre le problème de vibrations libres, nous utilisons une méthode de Newton d'ordre élevé qui associe une technique d'homotopie avec une méthode de perturbation. Pour le problème de vibrations forcées, nous utilisons la Méthode Asymptotique Numérique. Un exemple de vibrations libres issu de la littérature permet de valider la méthode numérique choisie.

### Abstract

In this work, we are interested in the numerical determination of the damping properties of hybrid composite structures composed of flax and carbon fibers. Since flax fiber introduces a frequency dependence to these damping properties, we consider viscoelastic constitutive equations (hysteretic, generalized Maxwell, fractional Zener). To determine the damping properties of these hybrid laminate composites, free and forced vibration problems are studied. The chosen constitutive equations introduce a nonlinear frequency dependence into the problems to be solved. To solve the free vibration problem, we use a high-order Newton method that combines a homotopy technique with a perturbation method. For the forced vibration problem, we use the Asymptotic Numerical Method. A free vibration example from the literature is used to validate the chosen numerical method.

**Mots Clés :** Amortissement ; Composite Hybride ; Maxwell généralisé ; Zener fractionnaire ; Méthode de perturbation

**Keywords :** Damping ; Hybrid Composite ; Generalized Maxwell ; Fractional derivative Zener ; Perturbation Method

## 1. Introduction

Les structures composites stratifiées sont utilisées dans de nombreux domaines industriels, tel que le transport, le génie civil et militaire. Ces matériaux sont en constante évolution, avec notamment l'émergence des composites hybrides, dont la matrice est renforcée par différents types de fibre. L'hybridation de fibres de lin et de carbone suscitent un intérêt particulier. La fibre de lin, matériau renouvelable et abondant, offre des propriétés comparables à celles de la fibre de verre, tout en se distinguant par une excellente capacité à amortir les vibrations [1]. La fibre de carbone présente d'excellentes propriétés mécaniques, d'où son utilisation dans les applications industrielles haute performance. L'hybridation lin/carbone permet de combiner les avantages de ces deux fibres afin de concevoir des matériaux plus performants et respectueux de l'environnement, tout en répondant aux exigences variées de l'industrie.

Actuellement, l'étude de composites hybrides lin/carbone reste limitée à des travaux principalement expérimentaux traitant, par exemple, de l'influence de la séquence d'empilement sur les propriétés mécaniques et l'amortissement [2]. Dans la littérature, des méthodes numériques, comme la méthode d'énergie modale [3] [4] et la méthode de Ritz [5] [6], sont utilisées pour déterminer les fréquences amorties et les facteurs de perte structuraux. Cependant, ces approches ne prennent pas en considération la dépendance en fréquence de l'amortissement des structures composites renforcées en fibres de lin [7]. Cette dépendance en fréquence nécessite l'utilisation de lois de comportement viscoélastiques issues des modèles rhéologiques de type hystérétique, Maxwell généralisé ou Zener fractionnaire. L'originalité de ce travail réside dans l'attribution d'une loi de comportement différente à chaque pli du stratifié, ce qui permet une modélisation plus fiable du comportement de chaque pli selon le matériau des fibres, leur orientation, etc. Comme les lois de comportement viscoélastiques dépendent de manière non-linéaire de la fréquence, le problème généré par les vibrations libres ou les vibrations forcées est non-linéaire et nécessite des méthodes spécifiques de résolution. Le modèle numérique proposé dans ce papier est basé donc sur la méthode de perturbation : la Méthode de Newton d'Ordre Élevé (MNOE) est utilisée pour résoudre le problème en vibrations libres et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN), quant à elle, permet de résoudre le problème en vibrations forcées.

## 2. Problématique à résoudre

### 2.1. Equations de la dynamique

En considérant le principe des puissances virtuelles, la relation contrainte-déformation et en utilisant la méthode des éléments finis, le problème discret de vibrations des structures composites peut s'écrire, dans le cas des vibrations libres et forcées, sous la forme suivante (Eq. 1) :

$$[\mathbb{K}^*(\omega^*) - \omega^{*2}\mathbb{M}]\{U^*\} = \{0\} \quad [\mathbb{K}^*(\omega) - \omega^2\mathbb{M}]\{U^*\} = \{F\} \quad (\text{Eq. 1})$$

où  $\{U^*\}$  désigne le vecteur des déplacements,  $\mathbb{M}$  la matrice de masse, réelle et constante et  $\mathbb{K}^*(\omega)$  la matrice de rigidité, complexe et dépendante de la fréquence. Le symbole "\*" désigne ici les composantes complexes.

Une différence notable entre les études en vibrations libres et forcées est que la pulsation  $\omega$  est réelle dans le cas forcé car elle est imposée par la force harmonique  $\mathcal{F} = \{F\}e^{j\omega t}$ , alors qu'elle est complexe dans le cas libre car elle est une variable du problème.

### 2.2. Lois de comportement viscoélastiques

Pour chaque pli, les modules définissant la loi de comportement sont notés  $\Lambda^*(\omega^*)$  et correspondent, selon l'orientation des fibres, aux expressions :  $E_L^*(\omega^*)$ ,  $E_T^*(\omega^*)$  et  $G_{LT}^*(\omega^*)$  avec  $L$  et  $T$  les axes longitudinaux et transversaux. Ces modules peuvent être exprimés comme la somme d'une partie réelle et élastique  $\Lambda_0$  et d'une partie complexe, visqueuse et dépendante de la fréquence  $\Lambda_v^*(\omega^*)$  (Eq. 2) :

$$\Lambda^*(\omega^*) = \Lambda_0 + \Lambda_v^*(\omega^*) \quad (\text{Eq. 2})$$

Dans le cadre de cette étude, trois différents modèles viscoélastiques seront utilisés : le modèle hystérétique (Fig. 1), le modèle de Maxwell généralisé (Fig. 2) et le modèle de Zener fractionnaire (Fig. 3).

A partir de la formulation des modules  $\Lambda^*(\omega^*)$  (Eq. 2), les matrices de raideur  $\mathbb{K}^*(\omega^*)$  (Eq. 1) sont exprimables de manière analogue et permettent d'écrire les problèmes de vibrations libres et forcées (Eq. 1) sous la forme suivante :

$$[\mathbb{K}_0 + \mathbb{K}^*(\omega^*) - \omega^{*2}\mathbb{M}]\{U^*\} = \{0\} \quad [\mathbb{K}_0 + \mathbb{K}_v^*(\omega) - \omega^2\mathbb{M}]\{U^*\} = \{F\} \quad (\text{Eq. 3})$$

Étant donné que le problème étudié diffère fondamentalement entre les cas des **vibrations forcées** et des **vibrations libres**, deux approches numériques distinctes sont nécessaires. Dans le cas des vibrations

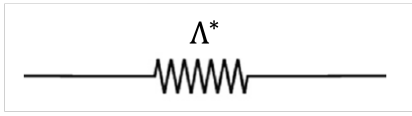


FIG. 1. – Modèle hystérique

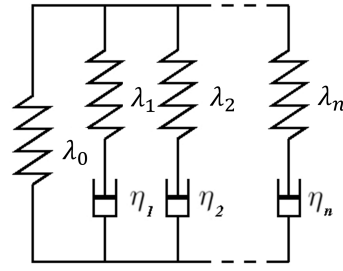


FIG. 2. – Modèle de Maxwell généralisé

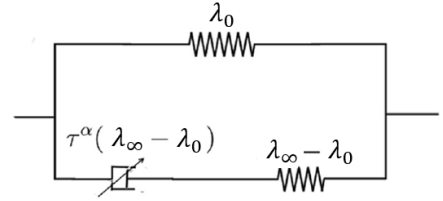


FIG. 3. – Modèle de Zener fractionnaire

forcées, il s'agit de déterminer les courbes de réponse harmonique pour une plage de fréquences de chargement, ce qui impose de résoudre de nombreuses équations harmoniques dépendantes de la fréquence. Ce processus, particulièrement coûteux en calculs, est efficacement traité par la MAN. Celle-ci repose sur des techniques de perturbation et de continuation, permettant de réduire drastiquement les coûts de calcul tout en obtenant des solutions précises et bien convergentes [8] [9] [10] [11].

En revanche, dans le cas des vibrations libres, l'objectif est d'évaluer directement les fréquences propres amorties et les amortissements associés. Cette problématique est inadaptée aux solveurs commerciaux classiques en raison de la complexité des formulations et des non-linéarités associées. Pour répondre à ce besoin, la MNOE est particulièrement adaptée. Elle utilise des techniques de perturbation et d'homotopie, permettant de résoudre efficacement des systèmes fortement non-linéaires.

### 3. Méthodes numériques

Pour appliquer ces deux méthodes, le problème doit être reformulé afin de le rendre exploitable dans chaque cas. En particulier, l'introduction de la variable  $\Omega = \omega^2$  permet de transformer les équations de vibration en une forme quadratique (Eq. 4) :

$$[\mathbb{K}_0 + \mathbb{K}^*(\omega^*) - \Omega^* \mathbb{M}] \{U^*\} = \{0\} \quad [\mathbb{K}_0 + \mathbb{K}_v^*(\omega) - \Omega \mathbb{M}] \{U^*\} = \{F\} \quad (\text{Eq. 4})$$

La MNOE est détaillée dans les références [12, 13] pour les composites stratifiés à base de fibres de lin et ne sera pas présentée dans ce travail. Nous détaillerons seulement la MAN, dédiée aux vibrations forcées.

La MAN consiste à chercher les inconnues du problème sous la forme d'un développement asymptotique, tronqué à l'ordre  $N$ , d'une variable  $a$  :

$$\{\chi\} = \sum_{i=0}^N a^i \{\chi_i\} \quad \text{avec} \quad \chi = \{U^*, \omega, \Omega, \Lambda^*, \mathbb{K}^*\} \quad (\text{Eq. 5})$$

Ce paramètre  $a$  est identique à une pseudo longueur d'arc  $a$  et définie telle que (Eq. 6) :

$$a = \langle U^* - U_0^*, U_1^* \rangle + (\Omega - \Omega_0) \Omega_1 \quad (\text{Eq. 6})$$

En introduisant ces développements asymptotiques (Eq. 5) dans les équations à résoudre et en identifiant suivant les puissances de  $a$ , le problème non-linéaire initial est transformé en un ensemble de problèmes linéaires :

**ordre 0 :**

$$\begin{cases} [\mathbb{A}^*] U_0^* = F \\ \Omega_0 \text{ connu} \\ \omega_0 = \sqrt{\Omega_0} \end{cases} \quad (\text{Eq. 7})$$

avec  $\mathbb{A}^*$  défini tel que :

$$[\mathbf{A}^*] = [\mathbb{K}_0 + \mathbb{K}_{v,0}^* - \Omega_0 \mathbb{M}] \quad (\text{Eq. 8})$$

$U_0^*$ , étant ici le vecteur de déplacement complexe, solution de l'ordre 0.

**ordre 1 :**

$$\begin{cases} \mathbf{A}^* U_1^* - \Omega_1 \mathbb{M} U_0^* + \mathbb{K}_{v,1}^* U_0^* = 0 \\ 1 = \langle U_1^*, U_1^* \rangle + \Omega_1^2 \\ \Omega_1 = 2\omega_0 \omega_1 \end{cases} \quad (\text{Eq. 9})$$

**ordre  $i > 2$  :**

$$\begin{cases} \mathbf{A}^* U_i^* - \Omega_i \mathbb{M} U_0^* + \mathbb{K}_{v,i}^* U_0^* = \sum_{k=1}^{i-1} \Omega_k \mathbb{M} U_{i-k}^* - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{K}_{v,k}^* U_{i-k}^* \\ 0 = \langle U_i^*, U_i^* \rangle + \Omega_i \Omega_i \\ \Omega_i = \sum_{k=0}^i \omega_k \omega_{i-k} \end{cases} \quad (\text{Eq. 10})$$

La résolution de chacun des ordres  $i$  est dépendante des ordres précédents, et comme pour la MNOE, les modules de comportement  $\Lambda^*$  doivent être développés pour chaque ordre en amont.

Les solutions aux différents ordres étant obtenues, une branche complète de solutions est ensuite calculée en utilisant une étape de continuation par la MAN [11]. À chaque étape, un nouveau point de départ pour la solution est calculé à partir d'une valeur donnée du paramètre de chemin  $a$ , notée  $a_{max}$ , qui détermine le domaine de validité  $[0 : a_{max}]$  et est défini par :

$$a_{max} = \left( \delta \frac{\|U_1^{\mathcal{R}}\|}{\|U_N^{\mathcal{R}}\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (\text{Eq. 11})$$

où  $\delta$  est un critère défini par l'utilisateur pour atteindre la précision cible requise.

#### 4. Résultats

Les résultats n'étant pas encore disponibles pour le cas des vibrations forcées, nous présenterons dans ce papier seulement les résultats obtenus pour des vibrations libres. L'exemple considéré vient de la référence [14]. Il s'agit d'une poutre composite de longueur  $0.25 \text{ m}$  et de la largeur  $0.025 \text{ m}$  composée de fibres de lin et de carbone. Les épaisseurs pour les fibres de carbone et de lin sont respectivement  $3 \text{ mm}$  et  $0.5 \text{ mm}$ . La poutre est considérée libre-libre. Les propriétés mécaniques des fibres sont données dans la table 1.

TAB. 1. – Propriétés élastiques des fibres, selon [14]

Fibre/résine	$E_L$ (GPa)	$E_T$ (GPa)	$G_{LT}$ (GPa)	$\nu$ (-)	$\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )
Carbone / Epoxy	54.1	54.1	3.6	0.05	1800
Lin / Epoxy	11.5	11.5	2.1	0.1	1450

Pour cet exemple, nous avons considéré une loi hystérétique. Cette loi s'écrit :

$$\Lambda^*(\omega^*) = \Lambda_0(1 + j\eta) \quad (\text{Eq. 12})$$

Les coefficients  $\eta$  pour chaque matériau et pour chaque direction ont été identifiés à partir des résultats expérimentaux de la référence [14] (Fig.2 à  $f = 300 \text{ Hz}$ ). Ces coefficients sont donnés dans la table 2. Nous considérons deux stratifiés hybrides : [CFC] et [FCF]. Pour ces deux composites, les fréquences amorties et les valeurs de l'amortissement obtenus avec la MNOE sont donnés dans les tableaux 3 et

TAB. 2. – Valeurs des paramètres  $\eta$  de la loi hystérétique, selon [14]

Matériau	$\eta_L = \eta_T$ (%)	$\eta_{LT}$ (%)
Carbone / Epoxy	0.7	1.6
Lin / Epoxy	3.0	3.4

TAB. 3. – Comparaison des fréquences amorties et des amortissements, dans le cas d'un stratifié [CFC]

	Référence [14]		Nos résultats	
	Fréquence (Hz)	Amortissement (%)	Fréquence (Hz)	Amortissement (%)
Modes de flexion	355	0.72	349	0.72
	981	0.82	956	0.77
	1924	0.86	1859	0.84
Modes de torsion	793	1.7	845	1.77
	1649	1.65	1746	1.73
	2622	1.58	2750	1.69

4. Pour ces exemples, les trois premiers modes de flexion et de torsion sont considérés. Pour ces deux stratifiés, nos résultats sont relativement proches de ceux présentés dans la référence [14]. Les modes de torsion présentent un amortissement plus important que les modes de flexion et ceci quelle que soit la séquence d'empilement considérée. Le stratifié composé des deux plis de lin est logiquement celui qui présente les valeurs d'amortissement les plus élevées.

TAB. 4. – Comparaison des fréquences amorties et des amortissements, dans le cas d'un stratifié [FCF]

	Référence [14]		Nos résultats	
	Fréquence (Hz)	Amortissement (%)	Fréquence (Hz)	Amortissement (%)
Modes de flexion	300	0.94	295	0.98
	829	1.01	810	1.01
	1635	1.01	1579	1.01
Modes de torsion	716	2.01	776	2.2
	1541	2.01	1597	2.16
	2337	2.01	2503	2.1

## 5. Conclusion

Dans ce travail, un modèle numérique est proposé pour étudier les problèmes de vibrations libres et de vibrations forcées de structures composites renforcées par des fibres de lin et de carbone. Ce modèle permet de prendre en considération la dépendance en fréquence de l'amortissement en modélisant le comportement de chaque pli du composite par une loi viscoélastique différente issue des modèles rhéologiques de type Hystérétique, Maxwell généralisé ou Zener fractionnaire. Le problème généré, dans le cas de vibrations libres ou forcées, étant non-linéaire en fréquence, des démarches de résolution basées sur la technique de perturbation sont utilisées. En vibrations libres, la Méthode de Newton d'Ordre Élevé est utilisée pour calculer le couple fréquence amortie-facteur de perte pour chaque mode de vibration. En vibrations forcées, la Méthode Asymptotique Numérique permet de calculer l'amplitude de la réponse amortie en fonction de la fréquence et d'en déduire, en appliquant la méthode de la bande passante, la fréquence amortie et le facteur de perte pour chaque résonance. Des exemples supplémentaires seront présentés lors de la conférence permettant de valider les approches numériques proposées.

## Références

- [1] T. Liu, P. Butaud, V. Placet, M. Ouisse « Damping Behavior of Plant Fiber Composites : A Review », Vol. 275, pp. 114392, 2021, ISSN 02638223.
- [2] A. Wang, X. Wang, G. Xian « The Influence of Stacking Sequence on the Low-Velocity Impact Response and Damping Behavior of Carbon and Flax Fabric Reinforced Hybrid Composites », Vol. 104, pp. 107384, 2021, ISSN 01429418.
- [3] J.-M. Berthelot, Y. Sefrani « Damping Analysis of Unidirectional Glass and Kevlar Fibre Composites », Vol. 64 n° 9, pp. 1261–1278, 2004, ISSN 0266-3538.
- [4] H. Li, Y. Niu, C. Mu, B. Wen « Identification of Loss Factor of Fiber-Reinforced Composite Based on Complex Modulus Method », Vol. 2017 n° 1, pp. 6395739, 2017, ISSN 1875-9203.
- [5] J.-M. Berthelot « Damping Analysis of Laminated Beams and Plates Using the Ritz Method », Vol. 74 n° 2, pp. 186–201, 2006, ISSN 0263-8223.
- [6] M. D. Rao, S. He « Dynamic Analysis and Design of Laminated Composite Beams with Multiple Damping Layers », Vol. 31 n° 4, pp. 736–745, 1993, ISSN 0001-1452.
- [7] S. Mahmoudi, A. Kervoelen, G. Robin, L. Duigou, E. Daya, J. Cadou « Experimental and Numerical Investigation of the Damping of Flax–Epoxy Composite Plates », Vol. 208, pp. 426–433, 2019, ISSN 02638223.
- [8] F. Abdoun, L. Azrar, E. Daya, M. Potier-Ferry « Forced Harmonic Response of Viscoelastic Structures by an Asymptotic Numerical Method », Vol. 87 n° 1-2, pp. 91–100, 2009, ISSN 00457949.
- [9] L. Azrar, R. Benamar, M. Potier-Ferry « An asymptotic numerical method for large-amplitude free vibration of thin elastic plates », Vol. 220 n° 4, pp. 695–727, 1999, ISSN 0022-460X.
- [10] L. Azrar, E. Boutyour, M. Potier-Ferry « Non-linear forced vibrations of plates by an asymptotic–numerical method », Vol. 252 n° 4, pp. 657–674, 2002, ISSN 0022460X.
- [11] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, *Méthode asymptotique numérique*, Collection Méthodes numériques, Hermès science publications-Lavoisier, ISBN 978-2-7462-1567-2, 2007.
- [12] M. Ziapkoff, L. Duigou, G. Robin, J.-M. Cadou, E. M. Daya « A High Order Newton Method to Solve Vibration Problem of Composite Structures Considering Fractional Derivative Zener Model », Vol. 31 n° 12, pp. 2534–2544, 2024, ISSN 1537-6494.
- [13] M. Ziapkoff, L. Duigou, G. Robin, J.-M. Cadou, E.-M. Daya « Characterization of the damping properties of composite structures based on flax fibers », *Composite Structures* Vol. 352 n° 118566, ISSN 0263-8223.
- [14] M. Assarar, W. Zouari, R. Ayad, H. Kebir, J.-M. Berthelot « Improving the damping properties of carbon fibre reinforced composites by interleaving flax and viscoelastic layers », *Composites Part B : Engineering* Vol. 152, pp. 248–255, 2018, ISSN 1359-8368.