

Optimisation multi-échelle de composites à rigidité variable pour l'invisibilité thermique

Multi-scale optimisation of variable-stiffness composites for thermal cloak

Alexandre MAS^{1,2}, Anita CATAPANO^{1,2} et Marco MONTEMURRO^{1,2}

1. Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, I2M, UMR 5295, F-33400, Talence, France

2. Arts et Metiers Institute of Technology, CNRS, Bordeaux INP, Hesam Universite, I2M, UMR 5295, F-33400 Talence, France

e-mail : alexandre.mas@u-bordeaux.fr, anita.catapano@bordeaux-inp.fr et marco.montemurro@ensam.eu

Résumé

Cet article présente une méthode de conception multi-échelle pour obtenir une structure capable d'assurer un camouflage thermique efficace en exploitant la distribution d'anisotropie et d'hétérogénéité d'un matériau composite à rigidité variable. Cette méthode multi-échelle est basée sur une méthode d'homogénéisation numérique générale pour relier les variables de conception à différentes échelles et sur le formalisme polaire pour décrire l'anisotropie du tenseur de conductivité thermique du composite. L'objectif étant de déterminer la fraction volumique de fibres (variable de conception à l'échelle microscopique), l'orientation des fibres et l'épaisseur optimales (variables de conception à l'échelle macroscopique) pour assurer le camouflage thermique efficace. Les champs des variables de conception sont représentés par des entités *non-uniform rational basis spline* (NURBS) afin d'obtenir des solutions conformes avec les logiciels de conception assistée par ordinateur standard. L'efficacité de cette approche est testée sur des problèmes de référence tirés de la littérature. Enfin, l'influence de multiples paramètres (l'initialisation des variables de conception, la configuration du volume élémentaire représentatif à l'échelle microscopique, les conditions aux limites, l'intégration de l'épaisseur locale parmi les variables de conception) sur la solution optimisée est étudiée.

Abstract

This paper presents a multi-scale design method to achieve an efficient thermal cloak effect by employing variable-stiffness composite structure. This multi-scale method is based on a general numerical homogenisation method to link the design variables at different scales and the polar formalism to describe the thermal conductivity tensor of the composite. In this context, the objective is to determine the optimal fibre volume fraction (microscale design variable), the orientation of fibres and the thickness (macroscale design variables) of the composite structure in order to design an efficient thermal cloak. The design variable fields are represented through non-uniform rational basis spline (NURBS) entities in order to achieve compliant solutions with standard computer-aided design software. The effectiveness of this approach is tested on benchmark problems taken from the literature. Finally, the influence of multiple factors on the optimised solution is investigated. Such factors include : the initial guess, the configuration of the representative volume element at the microscopic scale, the boundary conditions, the incorporation of the local thickness among the design variables.

Mots Clés : Camouflage thermique, optimisation multi-échelle, méthode polaire, optimisation de l'anisotropie.

Keywords : Thermal cloak, Multi-scale optimisation, Polar method, Anisotropy optimisation.

1. Introduction

La capacité de rendre un objet invisible a attiré l'attention de la communauté scientifique et industrielle au cours des quatre dernières décennies. Certains organismes vivants, comme les caméléons ou les pieuvres, possèdent déjà des capacités similaires pour s'adapter à leur environnement en affichant une sorte de camouflage. Plusieurs types de camouflage peuvent être réalisés en fonction de la physique étudiée, dans ce travail c'est le camouflage thermique qui sera étudiée. Réaliser un camouflage thermique revient à cacher une perturbation dans le champ de température due à un isolant ou à une source de chaleur. Deux approches existent dans la littérature pour réaliser un camouflage thermique : l'approche analytique (*thermotics*) [1] et l'optimisation topologique [2]. L'approche proposée dans ce papier vise à traiter le problème d'une manière plus générale : trouver un optimum global vis-à-vis de plusieurs variables de nature différente telles que la géométrie et la distribution des hétérogénéités et de l'anisotropie. L'approche proposée est basée sur trois piliers : a) la méthode polaire qui permet de décrire à l'aide d'invariants tensoriels la réponse mécanique d'une structure anisotrope ; b) la méthode d'homogénéisation basée sur une approche énergétique ; c) les entités NURBS qui permettent de décrire les champs des variables de conception, à l'aide de fonction polynomiales continues pour une meilleure l'implémentation des résultats dans les logiciels de conception assistée par ordinateur (CAO). De plus, certaines de ses propriétés, comme la propriété du support local, permettent de déterminer aisément l'expression formelle du gradient de la fonction de coût. L'efficacité de la méthode proposée est testée sur plusieurs cas tests, comme par exemple en considérant différents types de conditions limites ou différents points de départ pour la recherche de la solution optimale.

2. Cadre théorique

2.1. Méthode d'homogénéisation

À l'échelle microscopique, le volume élémentaire représentatif (VER) d'un matériau composite est un milieu hétérogène composé d'au moins deux phases, i.e., la fibre et la matrice. En revanche, à l'échelle macroscopique, le milieu hétérogène est modélisé comme un milieu homogène avec des propriétés mécaniques équivalentes obtenues par l'homogénéisation. La méthode numérique d'homogénéisation, basée sur l'énergie thermique dans ce travail, a déjà été appliquée pour déterminer les propriétés élastiques équivalentes d'un matériau composite [3]. Cette méthode va être utilisée pour déterminer les composantes du tenseur de conductivité du composite à l'échelle macroscopique (représenté au travers de la notation de Voigt par une matrice $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$). Pour calculer \mathcal{K} , trois hypothèses ont été introduites : (a) le comportement thermique des constituants (i.e. fibres et matrice) est linéaire ; (b) la réponse thermique du VER est évaluée en régime permanent ; (c) la conduction thermique est le seul phénomène de transfert thermique apparaissant dans le VER.

2.2. Formalisme polaire

À l'échelle macroscopique, la structure composite est modélisé comme une plaque monocouche équivalente dont le comportement est décrit par la théorie thermique classique des

stratifiés selon l'Eq. 1

$$\mathbf{q}_t = -t\mathcal{K}\nabla\theta \quad \mathbf{q}_t, \nabla\theta \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (\text{Eq. 1})$$

où \mathbf{q}_t est le vecteur de flux thermique, t est l'épaisseur de la structure composite et $\nabla\theta$ est le gradient de température. Comme discuté dans [4], utiliser les composantes cartésiennes de la matrice de conductivité thermique \mathcal{K} pour décrire le champ de variables anisotropes pour l'optimisation complexifie grandement le problème (plusieurs contraintes d'inégalité dépendant du repère de référence doivent être formulées pour assurer la positivité de la matrice \mathcal{K}). L'utilisation d'invariants polaires, au contraire, permet de formuler le problème de manière indépendante du repère de référence ainsi que d'exploiter le lien direct entre les invariants et les symétries dans la réponse physique (thermique dans ce cas) du matériau. [4]. Le tenseur de conductivité thermique sera décrit par les paramètres polaires selon l'Eq. 2

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11} &= T + R \cos(2\Phi), \\ \mathcal{K}_{12} &= R \sin(2\Phi), \\ \mathcal{K}_{22} &= T - R \cos(2\Phi), \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2})$$

où T et R sont invariants et représentent respectivement le module sphérique et déviatorique du tenseur, et Φ l'angle polaire définissant l'orientation de la première valeur propre (ou première composante principale) du tenseur par rapport à un repère choisi.

3. Formulation du problème

3.1. Variables de conception

Les variables de conception introduites dans ce problème d'optimisation sont : Φ (l'orientation principale du tenseur \mathcal{K} et donc l'orientation de l'axe d'orthotropie de la structure composite à l'échelle macroscopique), t (l'épaisseur local de la structure composite), ρ (la fraction volumique locale des fibres). Pour lier les variables aux différentes échelles, l'homogénéisation donne un lien entre la fraction volumique locale des fibres et les modules polaires pour pouvoir optimiser à l'échelle macroscopique. Les trois variables de conception doivent être adimensionnées pour pouvoir les optimiser, ρ étant déjà sans dimension, les deux autres variables seront adimensionnées selon l'Eq. 3

$$\tau = \frac{t - t_{LB}}{t_{UB} - t_{LB}}, \quad \phi = \frac{2\Phi}{\pi}, \quad (\text{Eq. 3})$$

où t_{LB} et t_{UB} sont, respectivement, les bornes inférieure et supérieure de l'épaisseur. La distribution de chaque variable de conception sera représentée par des surfaces NURBS, Eq. 4, afin de pouvoir utiliser les nombreux avantages de ces entités : a) propriétés du support local ; b) réduction du nombre de variables de conception ; c) dérivation du gradient de la fonction de coût.

$$\beta(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} R_{i_1 i_2}(\zeta_1, \zeta_2) \beta_{i_1 i_2}, \quad \text{avec } \beta = \rho, \phi, \tau. \quad (\text{Eq. 4})$$

3.2. Fonction objectif

Afin de formuler le problème de conception du camouflage thermique, il est nécessaire de définir une fonction objectif appropriée. Le camouflage thermique est atteint lorsque la perturbation du flux de chaleur induite par la présence d'un isolant, dans la zone Ω_{in} , n'affecte pas le champ de température dans la zone Ω_{out} , Figure 1.

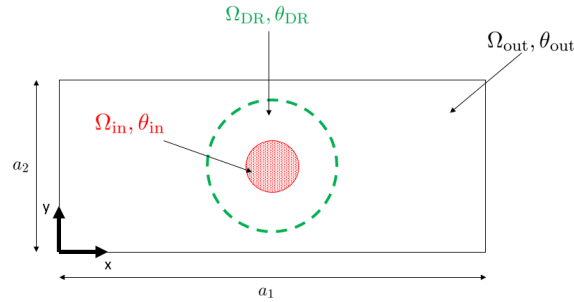


FIG. 1. – Dessin d'une subdivision typique de domain avec différents matériaux utilisés pour des problèmes de camouflage thermique.

Pour ce faire, les variables de conception seront optimisées dans la zone Ω_{DR} sur la Figure 1 et la fonction objectif adimensionnée, \mathcal{F} , s'écrira comme suit :

$$\mathcal{F} := \frac{J}{J_{\max}}, \quad (\text{Eq. 5})$$

avec

$$J_{\max} := (\tilde{\theta}_{out} - \bar{\theta}_{out})^T (\tilde{\theta}_{out} - \bar{\theta}_{out}), \quad (\text{Eq. 6})$$

et

$$J := (\theta_{out} - \bar{\theta}_{out})^T (\theta_{out} - \bar{\theta}_{out}). \quad (\text{Eq. 7})$$

Dans l'Eq. 5, J_{\max} représente la fonction décrivant le cas d'une perturbation maximale, i.e., le cas où l'isolant occupe intégralement Ω_{DR} et Ω_{in} . $\tilde{\theta}_{out}$ décrit le champ de température nodal dans la région Ω_{out} . Finalement J représente la fonction objectif non adimensionnée. $\bar{\theta}_{out}$ décrit le champ de température nodal dans la région Ω_{out} pour un cas sans isolant.

4. Resultat numérique

Un des cas tests réalisés dans ce travail est décrit ci-dessous, sur la Figure 2. Le modèle

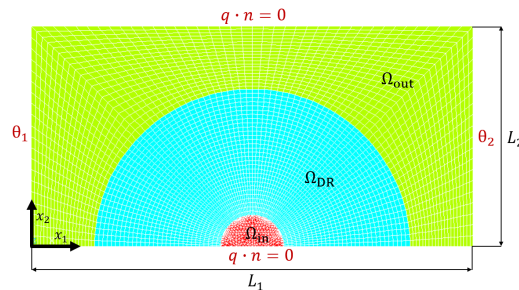


FIG. 2. – Géométrie, conditions limites et maillage du benchmark considéré dans ce travail.

éléments finis est réalisé sur le logiciel ANSYS® avec des éléments PLANE55 (élément

plan quadrilatère à 4 noeuds). La plaque présentée en Figure 2 est caractérisée par les dimensions $L_1 = 140$ mm, $L_2 = 70$ mm et possède une épaisseur de 3 mm. Les régions Ω_{in} et Ω_{DR} ont des rayons égaux à 10 mm et 50 mm, respectivement. 2400 éléments sont utilisés dans la région Ω_{DR} , des conditions adiabatiques sont imposées en $x_2 = 0$ et $x_2 = L_2$ et pour finir, une température est imposée en $x_1 = 0$, $\theta_1 = 300^\circ\text{C}$ et en $x_1 = L_1$, $\theta_2 = 200^\circ\text{C}$. La solution du problème d'optimisation formulé à l'Eq. 5 met en évidence l'influence de la valeur initiale de la fraction volumique de fibre, ρ . Le VER modélisé dans ce cas test est caractérisé par une distribution périodique des fibres en configuration hexagonale. Les propriétés thermiques imposées pour les constituants sont : $k_f = 380\text{W/mK}$ pour les fibres en cuivre et $k_m = 0.44\text{W/mK}$ pour la matrice en PEEK.

Le Tab. 1 représente les valeurs des fonctions objectifs à la fin de la démarche d'op-

Design case	ρ initial guess	\mathcal{F}_{ref}	\mathcal{F}	N_{iter}
DC1	$\rho = 0.2$	0.0262	3.969×10^{-18}	2000
DC2	$\rho = 0.5$	0.4115	3.32×10^{-14}	2000
DC3	$\rho = 0.8$	0.9557	1.288×10^{-12}	2000

TAB. 1. – Valeurs des fonctions objectifs et nombre d'itérations pour atteindre la convergence pour différentes valeurs initiales de ρ .

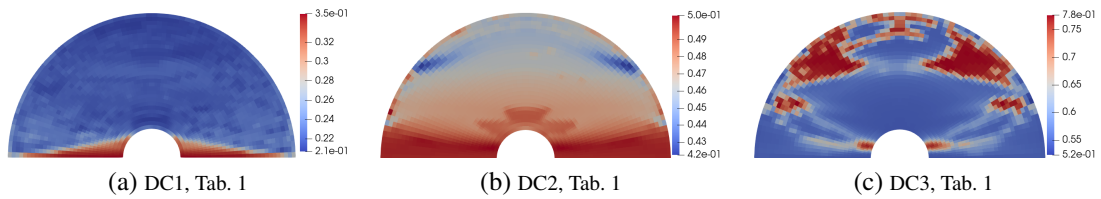


FIG. 3. – Influence de la valeur initiale de ρ sur la distribution de ρ dans la région Ω_{DR} ; solution optimale.

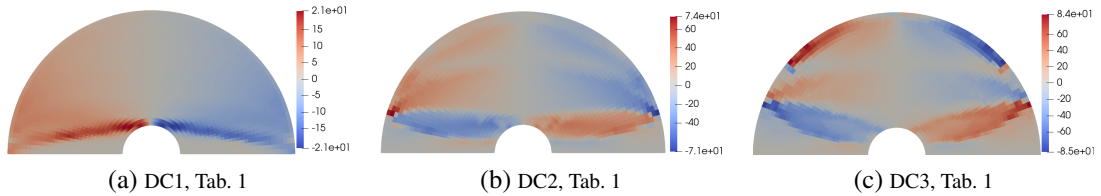


FIG. 4. – Influence de la valeur initiale de ρ sur la distribution de ϕ [deg] dans la région Ω_{DR} ; solution optimale.

timisation pour trois cas particulières qui diffèrent par la valeur initiale imposée sur la variable ρ . Les distributions optimisées des variables ρ , ϕ et t dans la région Ω_{DR} sont représentées en Figs. 3, 4 et 5, tandis que la Fig. 6 représente la différence de température dans la région Ω_{out} . Ces résultats démontrent que la valeur initiale de ρ influe énormément sur les résultats obtenues, que ce soit en terme de valeur de fonction objectif ou en terme de distribution des variables de conception. De plus, comme on peut remarquer dans le Tab. 1, la qualité de la solution (i.e. une fonction objectif plus faible) est obtenue lorsque

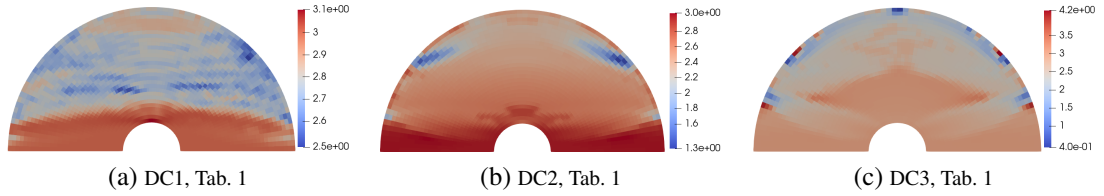


FIG. 5. – Influence de la valeur initiale de ρ sur la distribution de t [mm] dans la région Ω_{DR} ; solution optimale.

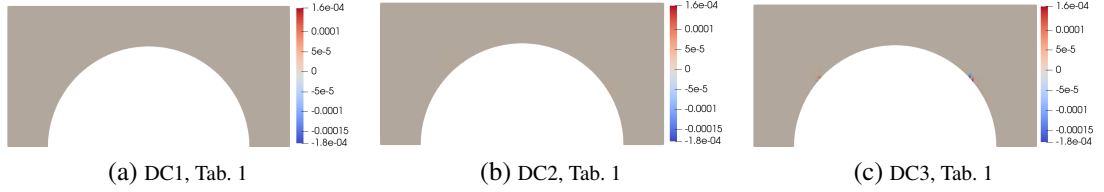


FIG. 6. – Influence de la valeur initiale de ρ sur la distribution des différence de temperature $\theta_{out} - \bar{\theta}_{out}$ dans la région Ω_{out} ; solution optimale.

la valeur initiale de ρ est basse. Concernant les distributions optimisées des variables, une solution plutôt intuitive a été obtenu pour la DC1. L'optimiseur converge vers une configuration exhibant une haute fraction volumique de fibres horizontales et une forte épaisseur dans la zone proche de l'axe $x_2 = 0$ de la région Ω_{DR} . Cette region spécifique permet de concentrer le flux thermique avant d'atteindre l'isolant, tandis que dans le reste de la région Ω_{DR} , les valeurs de ρ et t sont stables autour de leurs valeurs initiales et ϕ tend à rediriger le flux autour de l'isolant. La méthode a été également appliqué à d'autres cas test qui seront présentes pendant l'exposé.

5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé une stratégie d'optimisation multi-échelle pour concevoir un camouflage thermique en utilisant des composites à rigidité variable. La méthode a été utilisée sur plusieurs cas qui seront montrés durant la conférence et les résultats sont plus qu'encourageant quant à la validité de cette méthode. On obtient de meilleures performances, en terme de camouflage thermique, que les autres méthodes existant dans la littérature.

Références

- [1] Xiangying Shen, Ying Li, Chaoran Jiang, Yushan Ni, and Jiping Huang. Thermal cloak-concentrator. *Applied Physics Letters*, 109 :031907, 2016.
- [2] Garuda Fujii and Youhei Akimoto. Cloaking a concentrator in thermal conduction via topology optimization. 159 :120082.
- [3] Ever Barbero. *Finite Element Analysis of Composite Materials*. Journal Abbreviation : Finite Element Analysis of Composite Materials using Abaqus Publication Title : Finite Element Analysis of Composite Materials using Abaqus.
- [4] Paolo Vannucci. *Anisotropic Elasticity*, volume 85 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Singapore.