

# Utilisation des approches bayésiennes pour l'identification des lois de probabilité des paramètres incertains dans les panneaux raidis en composite.

## *Using Bayesian approaches to identify probability distributions of uncertain parameters in stiffened composite panels.*

Elton Donfack Siewe<sup>1,2</sup>, Jean-Philippe Navarro<sup>1</sup>, Santiago Garcia<sup>1</sup>, Jérôme Morio<sup>2</sup>, Sylvain Dubreuil<sup>1</sup>, Christian Fagiano<sup>3</sup>

1 : AIRBUS OPERATIONS SAS  
316 route de Bayonne  
F-31060 TOULOUSE cedex 09  
e-mail : elton.e.donfack-siewe@airbus.com

2 : ONERA/DTIS, Université de Toulouse  
F-31055 Toulouse, France  
e-mail : sylvain.dubreuil@onera.fr et jerome.morio@onera.fr

3 : DMAS, ONERA, Université Paris Saclay  
92320, Châtillon, France  
e-mail : christian.fagiano@onera.fr

### Résumé

Les matériaux composites, largement utilisés dans l'aérospatial pour leurs excellentes propriétés mécaniques spécifiques et leurs gains en masse, présentent une hétérogénéité et une anisotropie intrinsèques. Bien que ces caractéristiques améliorent les performances, elles génèrent d'importantes incertitudes liées à leur composition complexe (fibres, matrices, interfaces) et à leur sensibilité aux conditions de fabrication. Ces incertitudes conduisent à l'utilisation de coefficients de sécurité élevés, freinant l'innovation et augmentant les coûts de fabrication et de certification. Pour relever ces défis, l'industrie aspire à réduire les essais lors de la certification en utilisant des simulations numériques fiables. Cette étude se concentre sur la gestion des incertitudes épistémiques, notamment la méconnaissance des lois probabilistes des paramètres d'entrée, dans un cadre multi-échelle. Nous proposons d'effectuer une calibration bayésienne permettant d'identifier ces lois à partir de modèles analytiques et de données expérimentales. Cette approche renforce la robustesse des lois identifiées, favorisant un calibrage précis des modèles tout en capturant la variabilité observée. Appliquée initialement à des coupons composites, cette méthode démontre l'efficacité de la calibration dans un cas simple. Les lois probabilistes obtenues serviront de base pour le calibrage des modèles numériques, avant d'être propagées aux échelles supérieures. Cette démarche assure une gestion cohérente des incertitudes et renforce la crédibilité des prédictions numériques pour la certification.

### Abstract

Composite materials, widely used in the aerospace industry for their excellent specific mechanical properties and weight-saving advantages, exhibit inherent heterogeneity and anisotropy. While these characteristics enhance performance, they also introduce significant uncertainties due to the complex composition of these materials (fibers, matrices, interfaces) and their sensitivity to manufacturing conditions. These uncertainties result in the use of high and overly conservative safety factors, hindering innovation and driving up manufacturing and certification costs. To address these challenges, the industry seeks to reduce testing during certification by using numerical simulations. This study focuses on managing epistemic uncertainties, particularly the lack of knowledge about the probabilistic laws governing input parameters, within a multiscale framework. We propose a Bayesian calibration approach to identify these laws based on analytical models and experimental data. This method enhances the robustness of the identified laws, enabling precise model calibration while capturing observed variability. Initially applied to composite coupons, this approach demonstrates the effectiveness of calibration in a simplified case. The resulting probabilistic laws will serve as a foundation for calibrating numerical models before being propagated to higher scales. This methodology ensures consistent uncertainty management and bolsters the credibility of numerical predictions for certification purposes.

**Mots Clés :** Composite, Incertitude, Calibration bayésienne.

**Keywords :** Composite, Uncertainty, Bayesian Calibration.

## 1. Introduction

Les matériaux composites, largement utilisés dans l'aérospatial pour leurs excellentes propriétés mécaniques spécifiques et leurs gains significatifs en masse, se caractérisent par leur hétérogénéité et leur anisotropie intrinsèques [1]. Bien que ces caractéristiques améliorent les performances des structures, elles introduisent des incertitudes importantes dans leur comportement mécanique. Ces incertitudes proviennent de leur composition complexe (fibres, matrices, etc.), de la sensibilité des propriétés mécaniques aux conditions d'élaboration et d'autres facteurs [2]. Elles obligent les industriels à adopter des coefficients de sécurité élevés, ce qui freine le développement de solutions innovantes et augmente les coûts de certification. Dans ce contexte, l'objectif stratégique des industriels est de progresser vers une *certification par analyse*, une approche visant à réduire le nombre d'essais physiques nécessaires grâce à des analyses numériques fiables et robustes. Une telle évolution repose sur une gestion efficace des incertitudes dans les analyses numériques, afin d'accroître leur crédibilité et de garantir des prévisions précises et cohérentes.

Dans les systèmes complexes, la quantification des incertitudes se fait en propageant des paramètres d'entrée incertains  $X$ , modélisés par des lois de probabilité  $f_X(\cdot)$ , à travers un modèle, considéré comme une fonction « boîte noire »  $M$ , telle que  $Y = M(X)$ . L'objectif est d'estimer une quantité d'intérêt  $Y$  en sortie, généralement via la méthode de Monte Carlo :

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[M(X)] = \int_{\mathcal{X}} M(x) f_X(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M(X_i), \quad X_i \sim f_X, i = 1, \dots, N.$$

Cependant,  $f_X(\cdot)$  n'est pas toujours parfaitement connue, et  $M$  est souvent remplacé par un métamodèle pour réduire le coût de calcul. Dans cette estimation de  $\mathbb{E}[Y]$ , trois principales sources d'incertitudes, dites *épistémiques* (car réductibles), sont identifiées : la méconnaissance des lois d'entrée des modèles [3], les incertitudes liées à la méthode d'estimation des variables de sortie d'intérêt [4] et les incertitudes liées à l'utilisation de modèles de substitution [5, 4]. Dans cette étude, nous nous concentrons sur la première source d'incertitudes : la méconnaissance des lois probabilistes des paramètres d'entrée, et ce, dans un cadre multi-échelle.

Le cas d'étude utilisé est un panneau raidi composite de grande taille issu du fuselage d'un avion. Nous proposons une méthodologie pour traiter les incertitudes dans ce type de structure dans un cadre multi-échelle, avec une finalité directe : améliorer la crédibilité des analyses numériques et favoriser leur adoption dans les processus de certification par analyse.

## 2. Philosophie globale de l'approche développée

Dans ce travail multi-échelle, nous ciblons les échelles du coupon et du panneau (Fig. 1), qui serviront de cas d'application. La figure 1 illustre un panneau composite raidi de grande taille, constitué de plusieurs éléments (peau, raidisseur, cadre). L'interaction entre la peau et le raidisseur est modélisée par une loi cohésive. Nous utilisons la méthode des éléments finis pour la résolution de ce problème, et des éléments cohésifs sont utilisés pour modéliser l'interaction peau-raisseur.

L'objectif principal est d'estimer le quantile de la force  $Y = F_\alpha$  qui permet de décoller localement (premier élément cohésif totalement endommagé) le raidisseur de la peau, avec un intervalle de confiance. Pour cela, il est nécessaire de connaître la loi de probabilité des paramètres d'entrée du modèle, notée  $X$ , qui inclut les propriétés des matériaux, les paramètres de la loi de contact, les conditions aux limites et la géométrie. Ce quantile est estimé de la manière suivante :

$$F_\alpha = \inf\{f \mid P(Y \leq f) \geq \alpha\},$$

où  $P(Y \leq f)$  représente la probabilité que la force  $F$  soit inférieure ou égale à  $f$ , et  $\alpha$  est le quantile d'ordre recherché ( $\alpha = 95\%$ ).

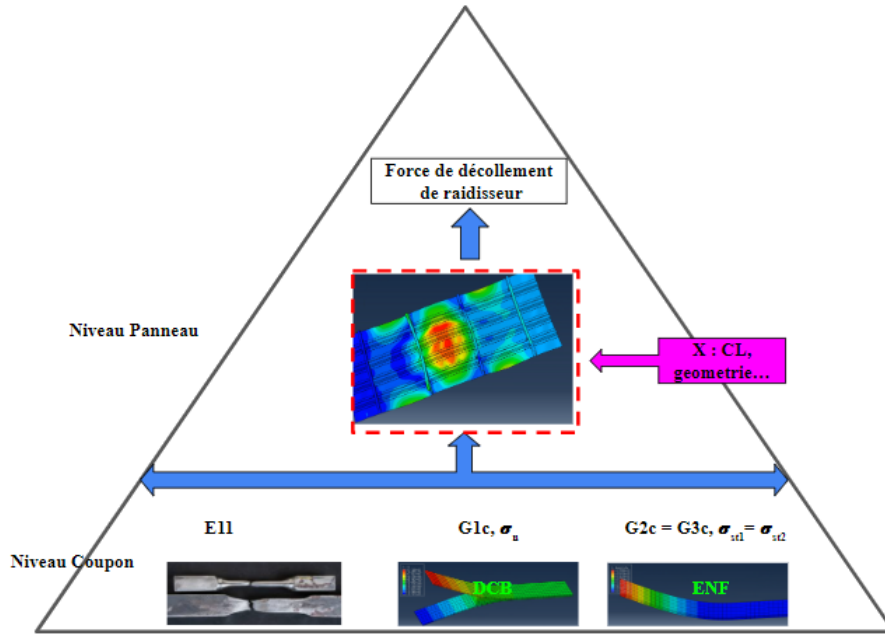


FIG. 1. – Approche multi échelle pour la prise en compte des incertitudes.

Deux de ces paramètres, les propriétés des matériaux et les lois de contact, sont identifiés à une échelle inférieure (coupon) grâce à des essais simples : traction, compression, DCB (*Double Cantilever Beam*), ENF (*End Notched Flexure*) et MMB (*Mixed Mode Bending*) présentés en Fig. 1. Nous proposons une approche d'identification probabiliste des lois de ces paramètres basée sur les données expérimentales disponibles à cette échelle. Cette méthode permet de conditionner les lois probabilistes des paramètres du modèle sur les observations expérimentales, améliorant ainsi la robustesse et la fiabilité des lois utilisées dans les modèles numériques au niveau panneau.

### 3. Méthodologie actuelle à basse échelle (coupon) : identification des lois des paramètres incertains

Nous utilisons des approches de calibrations bayésiennes [6] pour identifier les distributions des paramètres incertains en nous basant sur les données d'essais et les modèles numériques. Supposons que nous disposons de résultats d'essais coupon  $\{y^{(n)}\}$ , où  $n$  représente le nombre d'observations pour un essai donné. Nous cherchons à calibrer le paramètre  $X$  en prenant en compte ces observations, c'est-à-dire à estimer la loi conditionnelle  $p(X | y^{(n)})$  en tenant compte du nombre  $m$  d'essais réalisés. L'idée est d'exploiter l'ensemble des essais pour affiner l'apprentissage de  $p(X | y^{(n)})$ , la densité conditionnelle de  $X$  donnée  $\{y^{(n)}\}$ .

Pour un seul essai, la calibration de cette loi conditionnelle s'écrit à partir de la formule de Bayes :

$$p(X | y^{(n)}) = \frac{p(y^{(n)} | X)p(X)}{p(y^{(n)})} \propto p(y^{(n)} | X)p(X), \quad (\text{Eq. 1})$$

où :  $p(X)$  est le *prior*, dont la connaissance peut provenir d'observations indépendantes, d'avis d'experts, ou d'une autre calibration indépendante [6],  $p(y^{(n)} | X)$  est la vraisemblance associée au modèle.

En supposant que les  $m$  essais sont indépendants entre eux, la vraisemblance des  $m$  essais s'écrit :

$$p^{(m)}(y^{(n)} | X) = \prod_{k=1}^m p^{(k)}(y^{(n)} | X) = \left(p(y^{(n)} | X)\right)^m. \quad (\text{Eq. 2})$$

En combinant l'Eq. 1 et l'Eq. 2, la loi conditionnelle suivante est obtenue :

$$p(X | y^{(n)}) \propto \left( p(y^{(n)} | X) \right)^m p(X).$$

Pour obtenir les échantillons de  $p(X | y^{(n)})$ , un algorithme classique de type MCMC (*Markov chain Monte Carlo*) est utilisé en pratique [6].

#### 4. Application au niveau coupon de la pyramide : réponse analytique du DCB (Double Cantilever Beam)

L'essai DCB consiste à propager une fissure au sein d'un joint collé soumis à une traction, afin de mesurer la résistance de ce joint à la propagation de la fissure. Cet essai implique l'application d'une force de traction sur les deux bras d'une éprouvette symétrique comportant une fissure artificielle. Cette fissure artificielle, nécessaire pour amorcer le délaminage dans des conditions stables, est réalisée via une pré-fissure [7]. Cet essai permet de mesurer deux grandeurs principales : la ténacité de l'interface,  $G_{I_c}$ , qui désigne la résistance à l'amorçage du délaminage en mode *I* pur et la courbe de résistance, qui décrit la quantité d'énergie nécessaire pour propager la fissure initiale dans le plan étudié de la structure [8].

Nous utilisons la méthodologie présentée en section 3 pour calibrer les paramètres influençant de la réponse analytique (courbe force-déplacement) en nous basant sur les résultats de 5 essais expérimentaux. Nous avons à cet effet le modèle analytique suivant :

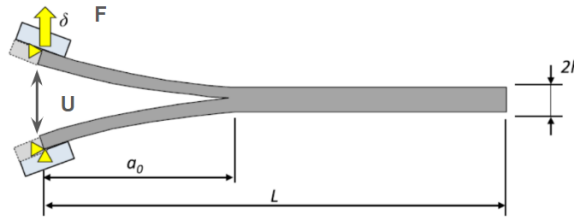


FIG. 2. – Modèle analytique de la réponse du DCB.

$$F_{\text{dcb}} = \sqrt{\frac{E_{11} b^2 h_a^3 G_{I_c}}{12(a + \chi h_a)^2}}, \quad U_{\text{dcb}} = \sqrt{\frac{8(a + \chi h_a)^3 F_{\text{dcb}}}{E_{11} b h a^3}}, \quad \chi = \sqrt{\frac{E_{11}}{11_{13}} \left( 3 - 2 * \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} \right)^2}, \quad \Gamma = 1.18 \frac{\sqrt{E_{11} E_{22}}}{G_{13}},$$

où  $F_{\text{dcb}}$  est la force de propagation de fissure,  $U_{\text{dcb}}$  est le déplacement associé à la propagation de fissure,  $a$  est la taille de la fissure,  $E_{11}$  est le module d'Young longitudinal,  $E_{22}$  est le module d'Young transversal,  $b$  est la largeur de l'éprouvette,  $G_{13}$  est le module de cisaillement hors-plan,  $h_a$  est la demi-épaisseur de l'éprouvette,  $\chi$  est un facteur dépendant des conditions spécifiques du test.

- Les paramètres du problème sont définis comme suit :  $U$  (déplacement imposé),  $F$  (force de propagation de fissure) et  $X = (E_{11}, G_{I_c})$  (paramètres du modèle à calibrer).
- Les entrées du problème de calibration (*prior et vraisemblance*) sont :

$$p(E_{11}) = \mathcal{N}(\mu_{E_{11}}, \sigma_{E_{11}}^2) \quad (\text{Loi normale, issue des essais de traction de simples éprouvettes})$$

$$p(G_{I_c}) = \mathcal{U}(a, b) \quad (\text{Loi uniforme, faute d'essais disponibles})$$

$$p(Y_{\text{test}} | G_{I_c}, E_{11}) = \mathcal{N}(0, 1) \quad (\text{Loi normale centrée réduite})$$

Nous cherchons à calibrer les distributions conditionnelles  $p(E_{11} | F_{\text{obs}})$  et  $p(G_{I_c} | F_{\text{obs}})$  en tenant compte des observations issues des 5 essais expérimentaux disponibles (Fig. 3).

#### 5. Résultats

Après calibration, nous avons obtenu les résultats de présentés dans la figure 4. La figure 4 nous montre les résultats des lois calibrées de  $E_{11}$  et  $G_{I_c}$ .

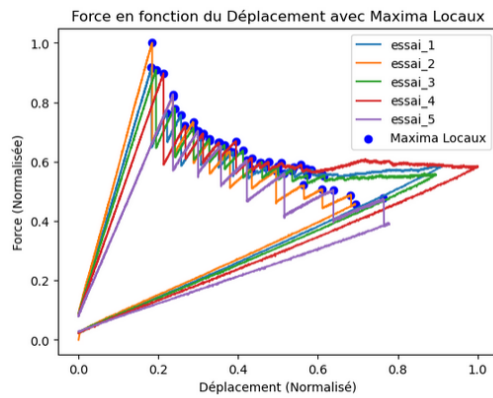


FIG. 3. – Résultats d’essais DCB.

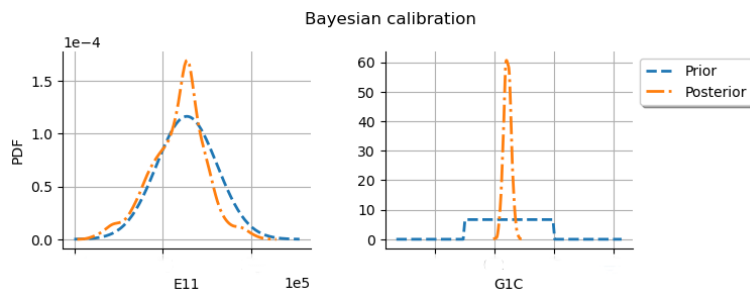


FIG. 4. – Résultats de la calibration des paramètres  $E_{11}$  et  $G_{1C}$  incertains identifiés dans la réponse analytique du DCB.

La figure 5 illustre que l’utilisation des lois calibrées pour tracer la courbe finale Force-Déplacement avec un intervalle de confiance à 95 % permet d’englober une grande majorité des points expérimentaux. Ces résultats renforcent la crédibilité du modèle proposé, en démontrant qu’il intègre efficacement la variabilité des essais (d’un coupon à un autre) tout en conservant une cohérence globale.

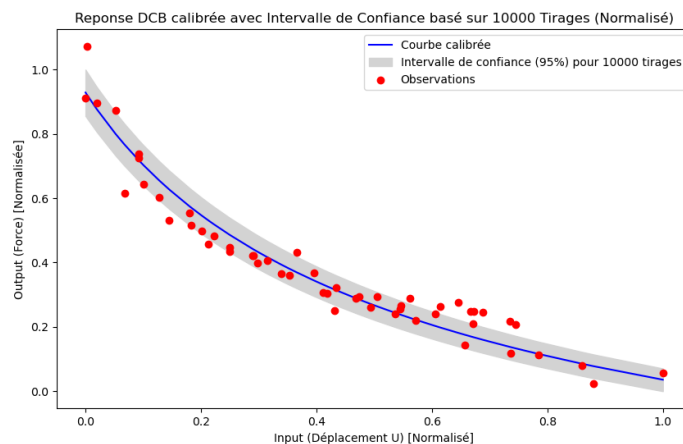


FIG. 5. – Comparaison de la courbe calibrée de la réponse du DCB sur les points d’essais.

## 6. Conclusion

Dans cette étude, nous avons utilisé des approches bayésiennes pour identifier les lois de probabilité des paramètres incertains des modèles analytiques. Les lois obtenues permettent de calibrer ces modèles tout en intégrant les incertitudes expérimentales. Cette approche bayésienne est un atout majeur, car elle exploite progressivement les informations issues des expériences et des essais, ce qui

renforce la robustesse et l'adaptabilité des lois identifiées. La prochaine étape consistera à intégrer ces informations, obtenues via les modèles analytiques, comme a priori pour calibrer les paramètres des modèles numériques (approche adaptative). Enfin, les lois probabilistes identifiées seront transférées à l'échelle supérieure de la pyramide d'essais pour propager les incertitudes à des modèles plus complexes. Cette démarche garantit une gestion cohérente des incertitudes tout au long de l'analyse multi-échelle, contribuant ainsi à des prédictions numériques plus crédibles et robustes.

## Références

- [1] J. Cinquin, Les composites en aérospatiale, Ed. Techniques Ingénieur, 2002.
- [2] C. Labouffie « Characterization of the impact of material variability on the parameters of composite behavior laws », Ph.D. thesis, Mines Saint-Etienne, 2023.
- [3] G. Sarazin « Analyse de sensibilité fiabiliste en présence d'incertitudes épistémiques introduites par les données d'apprentissage », Ph.D. thesis, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace Toulouse, 2021.
- [4] M. Menz « Réduction du coût numérique des méthodes d'apprentissage actif pour l'analyse de fiabilité », Ph.D. thesis, Université de Toulouse, 2020.
- [5] C. Surget, S. Dubreuil, J. Morio, C. Mattrand, J. M. Bourinet, N. Gayton « A sensitivity analysis based trade-off between probabilistic model identification and statistical estimation », *Reliability Engineering & System Safety* Vol. 254, pp. 110545, 2025.
- [6] T. Moins « Bayesian computational methods for estimating extreme quantiles from environmental data », Ph.D. thesis, Université Grenoble Alpes, 2023.
- [7] A. E. AC09036782 « Standard test method for mode I interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites », 2007.
- [8] F. Lachaud « Délaminage de matériaux composites à fibres de carbone et à matrices organiques : étude numérique et expérimentale, suivi par émission acoustique », Ph.D. thesis, Université Toulouse 3, 1997.